

ΘΕΩΡΙΑ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗΣ

Ιούνιος 2017

ΠΡΟΣΟΧΗ: Η διάρκεια των εξετάσεων είναι τρεις ώρες. Όλα τα θέματα είναι ισοδύναμα (2.5 μονάδες το καθένα). **Καλή Επιτυχία.**

Θέμα 1 : α) Δίνονται οι συναρτήσεις $f, g \in C[a, b]$ με $\|f\|_2 = \|g\|_2 = 1$. Να αποδείξετε ότι

$$\|f + g\|_2^2 + \|f - g\|_2^2 = 4.$$

β) Να βρεθεί η βέλτιστη ομοιόμορφη προσέγγιση της συνάρτησης $|x + \frac{1}{2}|$, ορισμένης στο διάστημα $[-1, 1]$, στον P_1 .

Θέμα 2 : Να βρεθεί η βέλτιστη ομοιόμορφη προσέγγιση της f , ορισμένης στο X_5 , στον P_1 , όπου

$$X_5 = \{-2, -1, 0, 1, 2\} \quad \text{και} \quad \begin{array}{c|ccccc} x_i & -2 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ \hline f_i & -1 & -3 & -2 & 0 & 1 \end{array},$$

χρησιμοποιώντας τον αλγόριθμο εναλλαγής σημείων ξεκινώντας με $x_\sigma = \{-2, -1, 0\}$.

Θέμα 3 : α) Να βρεθούν τα πολυώνυμα Legendre μέχρι και τρίτου βαθμού, χρησιμοποιώντας την αναδρομική σχέση.

β) Να βρεθεί η προσέγγιση ελαχίστων τετραγώνων της συνάρτησης f , ορισμένης στο X_5 , στον P_2 , όπου

$$X_5 = \{-3, -2, 0, 2, 3\} \quad \text{και} \quad \begin{array}{c|ccccc} x_i & -3 & -2 & 0 & 2 & 3 \\ \hline f_i & 0 & -2 & 0 & 10 & 18 \end{array},$$

χρησιμοποιώντας ορθογώνια πολυώνυμα στο σύνολο X_5 που παράγονται από την αναδρομική σχέση. Στη συνέχεια να υπολογιστεί η νόρμα του σφάλματος $\|f - q_2^*\|_2$

Θέμα 4 : Να βρεθεί η κυβική συνάρτηση spline στο $[-2, 2]$ που προσεγγίζει τη συνάρτηση f η οποία δίνεται στο σύνολο σημείων

$$X_4 = \{-2, -1, 1, 2\}, \quad \begin{array}{c|cccc} x_0 & x_1 & x_2 & x_3 \\ \hline x_i & -2 & -1 & 1 & 2 \\ \hline f_i & 2 & 0 & 0 & 4 \\ \hline t_0 & t_1 & t_2 & t_3 \end{array}$$

και $f'(-2) = -1, f'(2) = 7$.

Δίνεται ότι το πολυώνυμο παρεμβολής Hermite στο διάστημα $[x_j, x_{j+1}]$ είναι

$$s(x) = f_j \left[\frac{(x-x_{j+1})^2}{(\Delta x_j)^2} + 2 \frac{(x-x_j)(x-x_{j+1})^2}{(\Delta x_j)^3} \right] + f_{j+1} \left[\frac{(x-x_j)^2}{(\Delta x_j)^2} - 2 \frac{(x-x_{j+1})(x-x_j)^2}{(\Delta x_j)^3} \right] \\ + s'_j \left[\frac{(x-x_j)(x-x_{j+1})^2}{(\Delta x_j)^2} \right] + s'_{j+1} \left[\frac{(x-x_{j+1})(x-x_j)^2}{(\Delta x_j)^2} \right].$$